Vraag	Antwoord	Scores

Een gebroken functie en zijn inverse

10 maximumscore 4

- Er moet gelden $f(g(x)) = x$ — 1
- $f\left(\dfrac{x}{4-x}\right) = 4 - \dfrac{4}{\dfrac{x}{4-x}+1}$ — 1
- $4 - \dfrac{4}{\dfrac{x}{4-x}+1} = 4 - \dfrac{16-4x}{x+4-x} = 4-(4-x) = x$ (dus g is de inverse van f) — 2

of

- Punt (x, y) ligt op de grafiek van de inverse van f als $x = 4 - \dfrac{4}{y+1}$ — 1
- Hieruit volgt $\dfrac{4}{y+1} = 4 - x$ — 1
- Dus $y = \dfrac{4}{4-x} - 1$ — 1
- Dit herleiden tot $y = \dfrac{x}{4-x}$ (dus g is de inverse van f) — 1

Vraag	Antwoord	Scores

11 **maximumscore 6**

- Omdat f en g elkaars inverse zijn, wordt het gebied door de lijn met vergelijking $y = x$ in twee gelijke delen verdeeld 1
- De gevraagde oppervlakte is gelijk aan $2 \cdot \int_0^3 (f(x) - x)\,\mathrm{d}x$ 1
- Een primitieve van $f(x) - x$ (voor $x > -1$) is $4x - 4\ln(x+1) - \frac{1}{2}x^2$ 2
- Elk van de twee delen heeft dus een oppervlakte van $\left[4x - 4\ln(x+1) - \frac{1}{2}x^2\right]_0^3 = 12 - 4\ln 4 - 4\frac{1}{2}$ 1
- De gevraagde oppervlakte is $15 - 8\ln 4$ 1

of

- Het vierkant met diagonaal door $(0, 0)$ en $(3, 3)$ wordt door de grafieken van f en g in drie delen verdeeld, waarbij de oppervlakten van de niet-grijsgemaakte delen aan elkaar gelijk zijn 1
- De gevraagde oppervlakte is $3 \cdot 3 - 2 \cdot \int_0^3 (3 - f(x))\,\mathrm{d}x$ 1
- Een primitieve van $3 - f(x)$ (voor $x > -1$) is $-x + 4\ln(x+1)$ 2
- Het linkerdeel heeft een oppervlakte van $\left[-x + 4\ln(x+1)\right]_0^3 = -3 + 4\ln 4$ 1
- De gevraagde oppervlakte is $9 - 2(-3 + 4\ln 4) = 15 - 8\ln 4$ 1

of

- De gevraagde oppervlakte is gelijk aan $\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^3 g(x)\,\mathrm{d}x$ 1
- $g(x) = -1 + \dfrac{4}{4 - x}$ 2
- Een primitieve van $4 - \dfrac{4}{x+1}$ (voor $x > -1$) is $4x - 4\ln(x+1)$ 1
- Een primitieve van $-1 + \dfrac{4}{4 - x}$ (voor $x < 4$) is $-x - 4\ln(4 - x)$ 1
- De gevraagde oppervlakte is $\left[4x - 4\ln(x+1)\right]_0^3 - \left[-x - 4\ln(4-x)\right]_0^3 = 12 - 4\ln 4 - (-3 + 4\ln 4) = 15 - 8\ln 4$ 1